На правах рукописи

Абрашина-Жадаева Наталья Григорьевна

МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань — 2008

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент РАН
Четверушкин Борис Николаевич

доктор физико-математических наук,
профессор
Монастырный Петр Ильич

доктор физико-математических наук,
доцент
Федотов Евгений Михайлович

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится «24» апреля 2008 г. в «14.30» на заседании диссертационного совета Д.212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан «____» __________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., доцент Задворн О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена разработке и обоснованию экономичных численных методов для нестационарных и стационарных многомерных дифференциальных уравнений в частных производных. В работе рассмотрены вопросы построения численных алгоритмов на основе принципа аддитивности с использованием многокомпонентной векторной аппроксимации, исследованы условия устойчивости и асимптотической устойчивости, получены соответствующие априорные оценки.

Актуальность темы диссертации. Математическое моделирование успешно применяется практически во всех областях современных знаний. Математические модели, которые детально описывают исследуемые реальные процессы, как правило, являются сложными. Сложность задач математической физики обусловлена многомерностью, нелинейностью, наличием одновременно протекающих многих физических процессов в рамках одной системы. Получить точные аналитические решения этих задач, за исключением отдельных случаев, практически невозможно, поэтому применяют приближенные методы решения, например, конечно-разностные методы. Для возможности их эффективного использования конечно-разностные методы должны обладать основополагающими свойствами аппроксимации, устойчивости, сходимости и экономичности. Если первые три гарантируют надежное вычисление приближенного решения с необходимой точностью, то последнее позволяет делать это с относительно небольшими затратами вычислительной работы. Эффективным средством приближенного решения сложных многомерных задач математической физики на основе их конечно-разностных аппроксимаций являются методы численного интегрирования дифференциальных уравнений математической физики, называемые методами расщепления. Начиная с 50-х годов прошлого столетия такие приближенные методы получили бурное развитие и нашли широкое применение в практике численного решения целого ряда сложных и важных прикладных задач. Их достоинством является сведение исходной модели к расщепленной, существенно упрощающей программирование, распараллеливание, модульное структурирование вычислений. В результате удается получать гибкие и экономичные разностные схемы.

Существенным для развития рассматриваемого класса методов было введение понятия *суммарной аппроксимации* многомерного уравнения системой одномерных, открывшее возможность производить расщепление не только по пространственным переменным, но и по различным физическим процессам, отдельным членам дифференциальных и разностных уравнений. Различным аспектам экономичных методов расщепления посвящены работы Н.Н. Яненко, А.А. Самарского, Е.Г. Дьяконова, Г.В. Демидова, В.И. Лебедева, В.Н. Абрашина, В.И. Агошкова, В.Б. Андреева, К.А. Багриновского, С.К. Годунова, Н.С. Бахвалова, Г.М. Кобелькова, Е.В. Чижонкова, О.М. Белоцерковского, Н.В. Булеева, А.В. Гулина, И.В. Фрязинова, П.Н. Вабищевича, В.В. Воеводина, Ю.А. Кузнецова, А.Д. Ляшко, М.М. Карчевского, А.А. Злотника, В.П. Ильина, В.И. Кузина, Ю.М. Лаевского, Ж.-Л. Лионса, Р. Рихтмайера, К. Мортона, Д. Форсайта, М. Малькольма, К. Моулера, J. Douglas, H. Rachford, D. Peaceman, J. Gunn, B.S. Jovanovic, J. Ortega, L. Hageman, D. Young, G. Birkhoff, R. Varga, O.A. Widlund, R. Temam и др.

Интерес к изучению и разработке новых модификаций методов расщепления вызван многочисленными успешными их применениями для решения задач гидродинамики, теории переноса, метеорологии, океанологии, физики и техники. Идея расщепления особенно конструктивна при разработке численных методов для многомерных задач. При внешней простоте расщепление требует тщательного анализа получаемых систем уравнений, в связи с чем интенсивно развивались и продолжают развиваются теоретические исследования, связанные с проблемами повышения точности, устойчивости, скорости сходимости, быстродействия и расширения класса задач, для которых оно может применяться. Как известно, в общем случае, в рамках традиционных подходов, расщепление задачи связано с ухудшением асимптотических свойств и локальной аппроксимации, необходимостью дополнительных ограничений на компоненты операторов расщепления. Преодоление указанных и других проблем развития методов расщепления заслуживает внимания как исследователей, так и практиков. В связи с необходимостью повышения быстродействия приближенного решения многих прикладных задач, например задач метеорологии, как за счет совершенствования численных методов, так и вычислительной техники требуется построение новых экономичных численных методов расщепления, допускающих глубокое распараллеливание и асинхронную реализацию на ЭВМ.

Предлагаемая для защиты диссертация посвящена исследованию перечисленных выше проблем развитию на этой основе более эффективных методов расщепления.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Исследования проводились по темам, выполняемым кафедрой высшей математики и математической физики БГУ: «Дифференциал-3» (1986–1990 гг.) «Исследовать конструктивные свойства асимптотических инвариантов многомерных дифференциальных систем с полусвязями и слабыми взаимодействиями подсистем», «Дифференциал-4» (1991–1995 гг.) «Исследование асимптотических характеристик решений дифференциальных систем» (по плану НИР БГУ и программам АН): «Разработка научно-методического обеспечения новых учебных планов по прикладной математике и информатике», выполняемую по госбюджету (период 1991–1995 гг.) по плану НИР БГУ, «Разработка методического обеспечения учебного процесса по высшей математике и ее приложениям», выполняемую по госбюджетным НИР (период 1996–2000 гг.) по плану НИР БГУ и в отделе численных методов математической физики Института математики НАН Беларуси: тема Алгоритм-08 — «Разработка эффективных численных методов решения сложных задач математической физики» (1996–2000 гг., номер гос. регистрации №19974682, без финансирования); по теме «Исследования рациональных приближений со свободными полюсами и приложений к решению интегро-дифференциальных уравнений», выполняемой кафедрой высшей математики и математической физики Белорусского госуниверситета по Государственной программе фундаментальных исследований «Исследование основных математических структур и проблем математического моделирования», («Математические структуры-12») (2001–2005 гг., номер гос. регистрации №20012145).

Цель и задачи исследования. Развитие аддитивных численных методов, основанных на использовании многокомпонентной векторной аппроксимации. Обоснование эффективных методов расщепления с улучшенными свойствами, допускающими асинхронную обработку вычислений на ЭВМ. В контексте данной проблемы рассмотрены следующие задачи:

– разработка методики построения векторно-аддитивных методов полной аппроксимации с улучшенными асимптотическими свойствами;
– разработка специальных подходов к исследованию векторно-аддитивных методов полной аппроксимации;
– разработка последовательных и параллельных алгоритмов, без ограничений на количество операторов расщепления и без требования их попарной коммутируемости;

– обоснование построенных алгоритмов, их качественный анализ;
– разработка итерационных методов решения стационарных задач;
– построение и обоснование методов декомпозиции области на основе векторно-аддитивных схем;
– построение и обоснование многокомпонентных аддитивных методов расщепления по физическим процессам для задач механики сплошных сред.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются приближенные методы решения задач математической физики. Предметом исследования является новый класс векторно-аддитивных схем решения многомерных задач математической физики. Основными задачами, решаемыми в диссертации, являются нестационарные и стационарные задачи математической физики.

Методология и методы проведенного исследования. Работа носит теоретический характер. В диссертации использованы методы общей теории разностных схем, теории прикладных итерационных методов, методы функционального анализа, математический аппарат механики сплошных сред.

Научная новизна и значимость полученных результатов.

Научные положения и основные результаты, которые получены в диссертации и выносятся на защиту, являются новыми.

К таким результатам относятся: предложенные и обоснованные экономичные методы многокомпонентного расщепления полной аппроксимации с улучшенными асимптотическими свойствами для нестационарных задач математической физики произвольной размерности, итерационные многокомпонентные методы решения стационарных задач, методы декомпозиции (расщепления по подобластям) для многомерных стационарных и нестационарных задач.

В частности, доказаны теоремы о безусловной устойчивости без требования попарной перестановочности операторов расщепления, получены оценки скорости сходимости итерационных методов и определен один из вариантов оптимального итерационного шага, построенные алгоритмы эффективны для задач в областях сложной геометрии. Для ряда задач механики сплошных сред построены и изучены аддитивные методы расщепления по физическим процессам.

Конструкция численных алгоритмов на основе принципа аддитивности с использованием многокомпонентной (векторной) аппроксимации, в рамках предложенного в работе подхода, позволила преодолеть характерные недостатки, присущие известным аддитивным методам. В сравнении с известными модификациями метода переменных направлений предлагаемые методы безусловно устойчивы для нестационарных многомерных задач любой размерности. Для выполнения условий устойчивости не требуется попарной перестановочности операторов расщепления, кроме того, эти алгоритмы допускают распараллеливание вычислений в большей степени, чем многие известные экономичные методы, эффективны для задач в областях сложной геометрии.

Практическая значимость полученных результатов. Полученные в диссертации теоретические результаты и разработанные приближенные методы решения линейных и нелинейных многомерных уравнений в частных производных могут быть использованы в вычислительном эксперименте при математическом моделировании физических процессов. Построенные и исследованные в диссертации новые численные алгоритмы могут найти свое применение в ядерной физике, в механике сплошных сред, биофизике, лазерной технологии, экологии, т.е. там где используются модели типа конвекции-диффузии.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Векторно-аддитивная модель построения многокомпонентных алгоритмов расщепления дифференциальных уравнений в частных производных для решения нестационарных многомерных задач математической физики, позволяющая расширить область применимости методов расщепления.
2. Построение и обоснование новых классов многокомпонентных методов типа переменных направлений, сохраняющих свойство аппроксимации для каждого разностного уравнения в алгоритме, с последовательной и параллельной вычислительной реализацией их для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка параболического и гиперболического типов.
3. Доказательства теорем о безусловной устойчивости многокомпонентных векторных алгоритмов без ограничения на количество операторов аддитивного расщепления и требования их коммутируемости.
4. Многокомпонентные итерационные методы с последовательной и параллельной реализацией вычислительных алгоритмов для решения стационарных многомерных задач математической физики без ограничения на размерность и требования попарной перестановочности

компонент в аддитивном представлении оператора исходной задачи.

5. Теоремы о сходимости многокомпонентных итерационных алгоритмов для задач произвольной размерности (без обычного в подобных случаях требования перестановочности операторов расщепления) и априорные оценки их скорости сходимости. Улучшение аддитивных методов в случае коммутируемости пространственных операторов. Априорные оценки скорости сходимости итерационных векторно-аддитивных методов с зависимостью лишь от нижней границы спектра операторов расщепления. Итерационные алгоритмы для эллиптических уравнений и их систем, в том числе и со смешанными производными.
6. Алгоритмы метода декомпозиции (разбиения) расчетной области на ряд подобластей на основе многокомпонентных аддитивных методов расщепления полной аппроксимации для решения многомерных нестационарных и стационарных задач математической физики. Соответствующие этим алгоритмам разностные схемы, имеют более высокую точность по сравнению с методами переменных направлений и покомпонентного расщепления и структурно близки к явным.
7. Многокомпонентные аддитивные методы расщепления по физическим процессам системы уравнений Навье — Стокса в переменных «скорость – давление».

Личный вклад соискателя. Результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно и опубликованы в работах [1] — [50]. В коллективных публикациях автору принадлежат защищаемые в диссертации модифицированные векторно-аддитивные схемы, основные положения и выводы. Все результаты, которые приведены в диссертационной работе, подготовлены непосредственно автором или при ее прямом участии.

Апробация результатов диссертации. Результаты, включенные в диссертацию, докладывались на Международной конференции «Математическое моделирование и прикладная математика» (Москва — 1990 г.), Международной конференции «Теория приближения и задачи вычисл. матем.» (Днепропетровск — 1993 г.), Международной конференции «Проблемы математики и информатики» (Гомель — 1994 г.), Всероссийском семинаре «Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач» (Казань — 1998, 2004 гг.), Second International Conference «Finite-difference methods: theory and application» (Minsk — 1998 г.), Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика РАН А.А. Самарского (Москва — 1999 г.), Международной конференции «Еругинские чтения» (Гомель — 1999 г.), VIII Белорусской математической конференции (Минск — 2000 г.), Международной конференции «Еругинские чтения» (Витебск — 2003 г.), Mathematical Modelling Analysis Abstracts of the 8th Intern. Conference MMA, (Trakai — 2003, 2005, 2007 г.), Международной матем. конференции (Воронеж — 2005 г.); 6,7-м Всероссийском семинарах «Сеточные методы и их приложения» (Казань — 2005, 2007 г.).

Кроме того, результаты докладывались и обсуждались на семинарах академика РАН А.А. Самарского — Московский государственный университет; профессоров А.Д. Ляшко — Казанский государственный университет; М.П. Сапаговаса — институт математики и информатики АН Литвы, членов-корреспондентов НАН Беларуси: Я.В. Радыно — Белорусский государственный университет, кафедра функционального анализа; В.И. Корзюка — Белорусский государственный университет, кафедра уравнений математической физики, на Математическом обществе РБ под председательством Я.В. Радыно.

Публикации. Результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 50 работах: в 26 статьях в рецензируемых научных журналах из них 23 в журналах из Перечня ВАК для опубликования основных результатов на соискание степени доктора наук (редакция июль 2007 года), в 10 статьях в сборниках материалов научных конференций, в 14 тезисах докладов и выступлений на конференциях).

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, пяти глав, заключения и списка использованных источников. Общий объем работы — 193 страницы. Список использованных источников состоит из 191 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Во **введении** идет речь об актуальности проблематики, о близких к теме диссертации исследованиях, кратко характеризуется содержание диссертации. Нумерация формул, лемм, теорем, следствий, замечаний соответствует нумерации в диссертации.

Основные положения и результаты работы изложены на примере абстрактной задачи Коши. Единообразная операторная запись дает возможность проводить исследования с единой точки зрения для разных схем в различных постановках. Следуя классической теории разностных схем, сводим общего вида начально-краевую задачу для параболического уравнения (см., например, *Красносельский М. А. и др.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М.: Наука, 1966.— 499 с.) к абстрактной задаче Коши

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = u_0, \tag{1.1.1}$$

в некотором гильбертовом пространстве H, в котором норма и скалярное произведение определены следующим образом: $\int_G (uvdx) = (uv)$, $\|u\| = \sqrt[2]{(u,u)}$.

Здесь A — действующий в H самосопряженный неограниченный положительно определенный оператор, порожденный эллиптическим дифференциальным оператором и системой граничных условий. Мы считаем, что некоторый линейный дифференциальный оператор L, действующий на $u(x,t)$ как функцию $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$, принадлежащую G, где G — p-мерная область евклидова пространства, заменен с учетом краевых условий оператором A с плотной в H и не зависящей от t областью определения $D(A) \subset H$ и с областью значений $R(A) \subset H$. Краевые условия учитываются требованием $u = u(t) \in D(A), \quad 0 \leq t \leq T$. $u = u(t)$ — искомая, $f = f(t)$ — заданная функции из H,

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \tag{1.1.2}$$

где A_α — линейные положительные операторы в гильбертовом пространстве H с теми же областями определения и значений, что и у оператора A, т.е. $\bigcap_{\alpha=1}^{p} D(A_\alpha) = D(A)$. Будем называть $A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2..., p$ компонентами исходного оператора A или «одномерными» операторами. Аддитивное представление (1.1.2) лежит в основе большинства экономичных методов.

Пусть $t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, ..., \quad \tau > 0$, сетка на отрезке $0 < t < T$. Основная алгоритмическая идея всех экономичных методов состоит в написании таких разностных уравнений, что их решение сводится к последовательному применению стандартных алгоритмов (например, метод одномерной прогонки), что при переходе от слоя n к слою $n+1$ требуется $O(N)$ действий, где N — число узлов пространственной сетки.

Такие методы сочетают достоинства явных и неявных схем и снимают противоречие между простотой реализации и устойчивостью. Суть этих методов в использовании структурных свойств оператора A. В экономичных аддитивных методах используется представление оператора A в виде (1.1.2). Вместо обращения оператора $E + \tau A$ алгоритмы конструируются так, чтобы последовательно или параллельно обращались более простые операторы, например, операторы вида $E + \gamma\tau A_\alpha$, $\gamma > 0$, действующие по одной пространственной переменной. Системы с матрицами $E + \gamma\tau A_\alpha$ решаются методом прогонки с затратой $O(N)$ действий. Для $p = 2$ и положительно определенных A_α такие методы были предложены в работах J. Douglas, H. Rachford; D. Peaceman, H. Rachford; J. Douglas. Альтернативным подходом к построению экономичных методов решения многомерных задач явился метод расщепления (метод дробных шагов). В данном случае, когда проводится редукция сложного оператора к простейшим, интегрирование исходной задачи сводится к последовательному интегрированию уравнений более простой структуры. В этой связи появилось несколько актуальных научных направлений, наиболее значимый вклад в которые внесли Г.И. Марчук, А.А. Самарский, Н.Н. Яненко. Предлагались различные модели факторизованных схем. Среди этих методов особо отметим метод расщепляющегося оператора (Е.Г. Дьяконов, 1962), метод приближенной факторизации (Н.Н. Яненко и Г.И. Марчук, 1966), метод факторизации, на основе метода регуляризации (А.А. Самарский, 1963).

Отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной (слабой) аппроксимации в методах расщепления позволил дать единую трактовку экономичных методов как аддитивных схем и существенно расширил класс задач, решаемых с их помощью. Такие вычислительные алгоритмы, вообще говоря, ориентированы на простую (расщепленную) модель, при этом погрешность аппроксимации всей совокупности простейших разностных подзадач (общего алгоритма) определяется как сумма невязок каждой разностной подзадачи, т.е. имеет место суммарная аппроксимация. Введение обобщающего понятия суммарной аппроксимации многомерного уравнения системой одномерных послужило теоретическим обоснованием метода расщепления и позволило производить «расщепление» не только по независимым переменным, но и по различным физическим процессам, отдельным членам дифференциальных и разностных уравнений с целью облегчения решения исходной задачи.

Бесспорным достоинством этого класса методов является его безусловная устойчивость для практически произвольной размерности и ослабленные требования к свойствам операторов задачи. Изучению алгоритмов и их разностных аналогов посвящена обширная литература, которая указана во Введении к диссертации. Основой конструирования нового класса векторно-аддитивных методов в настоящей работе служит, как и в классических методах расщепления, принцип аддитивности и понятие суммарной аппроксимации. Выбор именно такой группы методов в качестве основного объекта исследований определяется их простой реализацией, экономичностью по числу арифметических операций и возможностью распараллеливания вычислений на многопроцессорных вычислительных системах.

В первой главе диссертации рассмотрены общего вида линейные начально-краевые задачи параболического типа.

Исходная задача записывается в виде эволюционной абстрактной задачи Коши (1.1.1), (1.1.2) на примере которой изложена суть векторно-аддитивной модели расщепления. А именно: вместо одного скалярного решения $u(t)$ вводится вектор решений $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_p(t))$. Функции $u_1(t), u_2(t), ..., u_p(t)$ трактуются как компоненты вектора-решения задачи и их число равно числу слагаемых в сумме (1.1.2), причем каждая отдельная компонента u_α аппроксимирует решение исходной задачи. Простейший способ построения векторной схемы состоит в клонировании исходной задачи:

$$\frac{du_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta u_\beta = f(t), \quad \alpha = \overline{1,p} \quad 0 < t \le T, \tag{1.1.7}$$

с начальными условиями вида

$$u_\alpha(0) = u_0, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{1.1.8}$$

переходу к промежуточной системе однотипных задач (1.1.7), (1.1.8).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.2.1 *Пусть в абстрактной задаче Коши (1.1.1) оператор* $A = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, A_α*— положительно определенные операторы в* H*, тогда задача (1.1.7), (1.1.8), полученная в результате перехода от скалярного решения задачи (1.1.1) к вектор-решению, поставлена корректно, причем* $u_\alpha(t) = u(t)$*, для любых* $t \in [0, T]$ $\alpha = 1, ..., p$ *и справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \|u_\alpha(t)\|^2 + 0,5\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u_\alpha(t) - f(t)\|^2 \le$$

$$\leq M(0,5\|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u_\alpha(0) - f(0)\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \|u_\alpha(0)\|^2 + \int_0^t \|\frac{\partial f}{\partial t}\|^2 dt),$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная величина.

В векторных моделях разностных схем каждая конкретная компонента вектора решения аппроксимирует решение скалярной исходной задачи. Полученные в данной главе результаты о корректности некоторых видов векторно-аддитивных методов указывают на их тесную связь с известными методами суммарной аппроксимации, а именно, с локально-одномерными методами. В случае дискретной аппроксимации по времени для уравнения (1.1.1) предложена многокомпонентная разностная схема

$$\frac{\widehat{y}_\alpha - y_\alpha}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta \widehat{y}_\beta + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta y_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}; \tag{1.3.1}$$

$$y_\alpha(0) = u_0.$$

Из данной системы уравнений последовательно на определенном шаге по времени находятся компоненты y_α. Схема (1.3.1) представляет собой довольно простое конструктивное изменение классических алгоритмов типа метода переменных направлений. Доказана безусловная устойчивость алгоритма (1.3.1) при любом числе компонент разбиения исходного оператора задачи без дополнительных требований к их свойствам. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.3.1 *Пусть $A_\alpha \geq 0$, $\alpha = \overline{1,p}$, тогда схема (1.3.1) при всех $\tau < \tau_0$ безусловно устойчива по начальным данным и правой части, и для решения разностной задачи справедлива оценка*

$$\|\widehat{y}_\alpha\| \leq \|y_\alpha\| + \tau\|f(0) - Au_0\| + \tau t \max_t \|f_t\|.$$

Конструктивное векторное представление алгоритма позволило избавиться от ограничений, во-первых, на размерность ($p = 2$) как в классическом методе переменных направлений, а, во-вторых, от условий коммутативности операторов разбиения, характерных, как правило, для методов расщепления. В случае рассмотрения многомерного линейного уравнения параболического типа каждое из уравнений (1.3.1) решается методом одномерной трехточечной прогонки по «своему» пространственному направлению. Отметим, что безусловная устойчивость и сходимость этого алгоритма изучалась многими авторами, например, В.Н. Абрашиным, П.Н. Вабищевичем, И.А. Дзюбой, С.Н. Лапко, С.Н. Лэхтиковым, А.Н. Якубеней и другими авторами.

В этой же главе рассмотрены и обоснованы новые варианты схем при многокомпонентном векторном расщеплении, т.е. модифицированные алгоритмы вида

$$\frac{\widehat{y}_\alpha - y^*_\alpha}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta \widehat{y}_\beta + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta y_\beta = f, \tag{1.4.3}$$

$$y_\alpha(0) = u_0, \quad \alpha = \overline{1,p},$$

где

$$y^*_1 = y_\alpha, \quad y^*_\alpha = 0,5(y_{\alpha-1} + y_\alpha), \quad \alpha = \overline{2,p},$$

а также

$$\frac{\widehat{y}_\alpha - \widetilde{y}}{\tau} + \sigma(A_\alpha \widehat{y}_\alpha - A_\alpha y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta y_\beta = f, \tag{1.4.4}$$

$$y_\alpha(0) = u_0, \quad \alpha = \overline{1,p},$$

где

$$\widetilde{y} = \frac{1}{p} \sum_{\beta=1}^{p} y_\beta. \tag{1.4.5}$$

При моделировании данных модификаций многокомпонентного расщепления важную роль сыграло стремление минимизировать число операций, требуя при этом, чтобы разностный алгоритм наследовал в пространстве сеточных функций как можно лучше основные свойства дифференциального уравнения. Одним из таких свойств является асимптотическая устойчивость.

Обоснование асимптотической устойчивости строится на доказательстве утверждения:

$$\|v\|^2_3 \to 0 \text{ при } t \to 0, \text{ где } \|v\|^2_3 = \sum_{\alpha=1}^{p} (v^{(\alpha,\alpha-1)}, v^{(\alpha,\alpha-1)}), \ v^{(\alpha,\alpha-1)} = y_\alpha - y_{\alpha-1}.$$

При этом компоненты многокомпонентного векторного расщепления в алгоритмах (1.4.3) и (1.4.4) стремятся друг к другу и к решению чисто неявной схемы. По сути с увеличением t дополнительная погрешность, связанная с аппроксимацией (по сравнению с чисто неявной схемой) аддитивного метода, стремится к нулю, что и гарантирует выполнение асимптотических свойств чисто неявного алгоритма. Данная методика исследования применена при доказательстве соответствующих теорем. Доказана безусловная устойчивость алгоритмов(1.4.3), (1.4.4). Имеет место

ТЕОРЕМА 1.4.1 *Если A_α — положительно определенные операторы $\alpha = \overline{1,p}$, $0,5 - \tau c_0 \geq 0$, то алгоритм (1.4.3) безусловно устойчив для всех $\tau < \tau_0$ и для его решения справедлива оценка*

$$\|v^{n+1}\|_3^2 \leq \tau^2 (1 + c_0\tau)^{-n} \left(\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y_\alpha(0) - f(0)\|^2 \right), \qquad (1.4.22)$$

$$\|v\|_3^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} (v^{(\alpha,\alpha-1)},\ v^{(\alpha,\alpha-1)}), \quad v^{(\alpha,\alpha-1)} = y_\alpha - y_{\alpha-1}, \quad c_0 > 0.$$

При этом алгоритм (1.4.3) допускает последовательную реализацию с применением скалярной трехточечной прогонки для соответствующих многомерных задач математической физики. А алгоритм (1.4.4) допускает асинхронную реализацию вычислений, когда каждая компонента вектора решения находится на временном слое независимо друг от друга, а при переходе на новый временной слой компоненты связаны условием (1.4.5). Поэтому алгоритм удобен для использования современных параллельных вычислительных систем. Все это говорит об экономичности предложенных схем. В заключении главы приведен результат первой работы в построении векторных многокомпонентных методов [28], в которой предложены «собственная» пространственно-временная сетка по каждому направлению и алгоритмы для задач в областях сложной геометрии.

Таким образом, в первой главе диссертации исследованы векторно-аддитивные методы полной аппроксимации для нестационарных задач математической физики. Схемы относятся к классу экономичных методов, примыкающих к классическому методу переменных направлений. Получены результаты о безусловной устойчивости таких методов по начальным условиям и правой части без ограничения на число операторов аддитивного разбиения (на пространственные операторы расщепления накладываются минимальные условия). Эти операторы могут быть как непрерывными, так и дискретными. Изучены асимптотические свойства предложенных методов. Результаты ориентированы так же на последующие главы диссертации, где стабилизирующие свойства алгоритмов необходимы для построения итерационных методов решения стационарных задач математической физики.

В качестве приложения рассмотрены краевые задачи для многомерных параболических уравнений, в том числе для уравнений в частных производных со смешанными производными.

Во второй главе диссертации изучена модификация распараллеленного алгоритма (1.4.4) в случаях, когда в абстрактных задачах Коши, которые поставлены в соответствии начально-краевым задачам с многомерным линейным и квазилинейным уравнениями, операторы $A_\alpha = A_\alpha(t)$, и $A_\alpha = A_\alpha(t, u)$ [18, 19]. Исследованы подобные алгоритмы для линейной и нелинейной задачи Коши. Для линейных эволюционных уравнений, когда оператор исходной задачи имеет временную зависимость, построены и изучены двухслойные аддитивные методы с параллельной реализацией вычислительного процесса, приспособленные для параллельных ЭВМ:

$$\frac{\widehat{y_\alpha} - \widetilde{y}}{\tau} + \tau\sigma(A_\alpha y_\alpha)_t + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta y_\beta = f, \tag{2.1.7}$$

$$y_\alpha(0) = u_0, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad \widetilde{y} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha.$$

Показано, что имеет место равенство

$$\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\widehat{y}_\alpha\|^2_{A_\alpha} + 0.5\|\widehat{\widetilde{y}}\|^2 + 0.5p^{-2}\|\widehat{v}\|^2_3 + 0.5\tau^2 p \sum_{\alpha=1}^{p} \|\widehat{A}_\alpha \widehat{y}_\alpha\|^2 +$$

$$+0.5\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p} \|A_\alpha y_\alpha\|^2 = 0.5\|\widetilde{y}\|^2 + 0.5\tau^2 p \sum_{\alpha=1}^{p} \|A_\alpha y_\alpha\|^2, \tag{2.1.9}$$

$$\|v\|^2_3 = \sum_{\alpha,\beta=1,\alpha>\beta}^{p} (v^{(\alpha,\beta)}, v^{(\alpha,\beta)}),$$

из которого следует ряд теорем об устойчивости разностной схемы (2.1.7).

ТЕОРЕМА 2.1.3 *Пусть $A_\alpha > 0$ — положительно определенные операторы, $c_0 E < A_\alpha < \triangle E$, тогда при всех $\tau < \tau_0$ разностная схема (2.1.7) устойчива и для ее решения справедлива оценка*

$$\|\widehat{\widetilde{y}}\|^2 + \tau^2 p \sum_{\alpha=1}^{p} \|\widehat{A}_\alpha \widehat{y}_\alpha\| + 0.5p^{-2}\|\widehat{v}\|^2_3 \leq (1+c)^{-1}\Big(\|y\|^2 +$$

$$+\tau^2 p \sum_{\alpha=1}^{p} \|A_\alpha y_\alpha\| + 0.5p^{-2}\|v\|^2_3\Big), \tag{2.1.10}$$

где $c = \min(0.5c_0\tau p, \triangle^{-1}\tau^{-1})$.

При многокомпонентном расщеплении без требования перестановочности пространственных операторов доказана безусловная устойчивость алгоритмов. Для нелинейных эволюционных уравнений, когда оператор A исходной задачи зависит от времени и от решения задачи, аддитивен и обладает достаточной гладкостью, построены и изучены распараллеленные аддитивные методы как итерационные, так и безытерационные. Предложен алгоритм подобный (2.1.7) в виде

$$\Big(\widehat{u}_\alpha - p^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p}\widehat{u}\Big)/\tau + \sigma\tau(A_\alpha(t,u_\alpha)u_\alpha)_t + \sum_{\alpha=1}^{p}A_\alpha(t,u_\alpha)u_\alpha = 0, \qquad (2.3.2)$$

$$u_\alpha(0) = \varphi, \quad \alpha = 1,\ldots,p,$$

где $\widehat{A}(t,u_\alpha) = \widehat{A}(\widehat{t},u_\alpha(\widehat{t}))$, а также линеаризованная разностная схема вида

$$\Big(\widehat{u}_\alpha - p^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p}u_\alpha\Big)/\tau + \sigma\tau A_\alpha(t,\widetilde{u})u_{\alpha t} + \sum_{i=1}^{p}A_i(t,\widetilde{u})u_i = 0, \qquad (2.3.5)$$

$$u_\alpha(0) = \varphi, \quad \widetilde{u} = p^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p}u_\alpha \quad \alpha = 1,\ldots,p.$$

В правую часть (2.3.2) может входить выражение вида $f(t,u)$ при условии $df/du \geq 0$. Наиболее эффективным и точным является алгоритм (2.3.2), однако недостатком его является то, что для каждого из алгоритмов (2.3.2) требуется решать нелинейную задачу. Более простым является линеаризованный алгоритм (2.3.5). Предложен безытерационный алгоритм, который основан на следующем подходе. Пусть оператор $A(t,u) = \widetilde{A}(t,u) + A_0(t)$, где $A_0(t)$ — линейный оператор. Для простоты рассмотрен случай $A_0(t) = b(t)E$, $b(t) > 0$ и $\widetilde{A}(t,u)$ представляется как $\widetilde{A}(t,u) = \sum\limits_{\alpha=0}^{p}A_\alpha(t,u_0)$, $\quad A_0(t,u_0) = A_0(t)$. Такое представление всегда возможно. Алгоритм, подобный (2.3.5), имеет вид

$$(\widehat{u}_\alpha - p^{-1}\sum_{i=0}^{p}u_i)/\tau + \sigma\tau(A_\alpha(t,u_0)u_\alpha)_t + \sum_{i=0}^{p}A_i(t,u_0)u_i = 0, \qquad (2.3.8)$$

$$\alpha = \overline{0,p}.$$

Сначала решается уравнение с номером $\alpha = 0$, а затем все остальные. Алгоритм (2.3.8) устойчив и для него доказана соответствующая теорема. Аналогичный алгоритм можно использовать для гиперболических уравнений, а также для нелинейных задач, включая уравнения со смешанными производными и для уравнения с нелинейной правой частью. В качестве примеров рассмотрены многомерные параболические и гиперболические уравнения, в том числе уравнения со смешанными производными. Так метод многокомпонентного расщепления применим и для уравнений гиперболического типа

$$\frac{d^2u}{d^2t} + A(t)u = f(t) \quad \text{в} \quad D \times D_t, \qquad (2.1.10)$$

$$u(0) = \varphi, \quad \frac{du}{dt} = \psi \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Оператор $A(t)$ — положительно определен и $(Au, u) \geq c_0(u, u), \quad c_0 > 0$ и $A(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha(t)$, где $A_\alpha = A_\alpha(t)$ — положительно определенные операторы. Для решения (2.1.10) предложена экономичная разностная схема

$$u_{\alpha\bar{t}t} + \sigma(\tau A_\alpha(t_{1/2})u_{\alpha t} - \tau A_\alpha(\check{t}_{1/2})u_{\alpha\check{t}}) + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta(t)u_\beta(t) = f, \qquad (2.1.11)$$

где $\alpha = 1, ..., p; \quad A(t_{1/2}) = A(t + 0,5\tau)$. Разностная схема (2.1.11) устойчива по начальным данным и правой части при $\sigma > p/4$. Рассмотренные схемы, как и схемы первой главы, пригодны при решении краевых задач для гиперболических систем первого порядка.

Аддитивные методы широко используются при решении краевых задач для эллиптических уравнений. Причем решение таких задач сводится к решению эволюционных задач для параболических уравнений до выхода на стационарный режим, а последнее выполняется при помощи, например, схем типа переменных направлений или факторизованных. Эффективный выход на стационарный режим (с точки зрения двухслойных разностных схем) во многих случаях гарантирует выполнение не только законов сохранения решения, связанных с консервативностью решения по времени, но и законов изменения решения по времени, что связано с асимптотическими характеристиками разностных методов.

В третьей главе на основе асимптотических свойств векторно-аддитивных разностных схем полной аппроксимации, построены итерационные многокомпонентные методы и изучены их свойства. Алгоритмы (1.4.3), (1.4.4), предложенные в первых двух главах, имеют несомненное преимущество перед классическим методом переменных направлений, т.к. они применимы для любого $p \geq 2$ и перед методом факторизации, т.к. не требуют коммутативности операторов расщепления. Указанные положительные свойства алгоритмов наследуют и итерационные методы, построение которых основывается на стабилизирующих свойствах задачи Коши для соответствующих эволюционных уравнений. Стационарная задача математической физики записывается в виде операторного уравнения

$$Ay = f, \qquad (3.1.1)$$

где $A : H \to H$— линейный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. A — самосопряженный и положительно определенный оператор: $A = A^* \geq cE$, $c > 0, \forall y \in H, f \in H$. Аддитивные методы, как мы уже отмечали, базируются на представлении оператора A в виде $A = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, где операторы A_α обладают теми же свойствами, что и исходный оператор A, т.е.

$$A_\alpha = A_\alpha^*, \quad (A_\alpha y, y) \geq c_0 \|y\|^2, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad c_0 > 0. \tag{3.1.4}$$

Идея метода установления позволила построить следующие итерационные методы решения стационарных задач, с использованием векторно-аддитивных разностных схем (1.4.3), (1.4.4):

$$\frac{\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{y}{}^*}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta \overset{s+1}{y}_\beta + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta \overset{s}{y}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{3.1.5}$$

где $\overset{0}{y}_\alpha = v_0$, $\overset{s}{y}{}^*_\alpha = \overset{s}{y}_\alpha$ при $\alpha = 1$, $\overset{s}{y}{}^*_\alpha = (\overset{s}{y}_{\alpha-1} + \overset{s}{y}_\alpha)/2$, при $\quad \alpha = \overline{2,p}$,

$$\frac{\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{\widetilde{y}}}{\tau} + \sigma A_\alpha \Big(\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\alpha\Big) + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta \overset{s}{y}_\beta = f, \quad \overline{1,p}, \tag{3.1.6}$$

где $\overset{0}{y}_\alpha = v_0$, $\overset{s}{\widetilde{y}} = p^{-1} \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{s}{y}_\alpha$.

Итерационные методы (3.1.5), (3.1.6) относятся к алгоритмам с последовательной и параллельной организацией вычислений соответственно. Теоретический анализ и вычислительный эксперимент итерационных процессов (3.1.5), (3.1.6) показал, что невязка для этих алгоритмов выражается следующим образом: $r(s) = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \overset{s}{y}_\alpha - f$. Она не согласуется, вообще говоря, с невязкой $r^*(s) = A\overset{s}{y} - f$ для канонической формы двухслойного итерационного процесса

$$B_s(\overset{s+1}{y} - \overset{s}{y})/\tau_{s+1} + A\overset{s}{y} = \varphi, \quad s = 1, 2, ..., \tag{3.0.1}$$

где итерация $\overset{s+1}{y}$ определяется предыдущим значением. Видимо, в силу этих обстоятельств, классических функциональных методов, разработанных для исследования итерационных методов (3.0.1), оказалось недостаточно для изучения итерационных процессов (3.1.5), (3.1.6). Поэтому в третьей главе расширена методика доказательства сходимости аддитивных итерационных методов. Весьма эффективным оказалось сравнение по норме значений компонент приближенного решения, а также сравнение приближенного решения с усредненным значением компонент решения. Доказано, что в случае коммутативности операторов расщепления A_α

при $\alpha \geq 2$ скорость сходимости итерационных методов зависит от нижней границы спектра операторов A, A_α, $\alpha = \overline{1,p}$. В методах переменных направлений и факторизации скорость сходимости существенно зависит от верхней границы спектра этих операторов, при этом естественно предполагается: A, A_α — дискретные аналоги пространственных операторов и, как следствие сказанному, скорость сходимости в этих алгоритмах зависит от величины шага сетки. В итерационных методах (3.1.5) и (3.1.6) такая зависимость отсутствует.

Справедлива

ЛЕММА 3.2.1 *Для итерационного метода (3.1.6) при $\sigma = p$ имеет место неравенство*

$$Q(\overset{s}{y}) \leq \left(\frac{1}{q}\right)^s Q(\overset{\circ}{y}), \tag{3.2.3}$$

где

$$Q(\overset{s}{y}) = \|r(s)\|^2 + p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_3^2, \quad q = 1 + 2c_0 p\tau,$$

$$r(s) = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \overset{s}{y}_\alpha - f, \quad \|\overset{s}{v}\|_3^2 = \sum_{\alpha,\beta=1,\alpha>\beta}^{p} \left(\overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)}\right),$$

$$\overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)} = \overset{s}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\beta, \quad \alpha = \overline{1,p}, \quad \beta = \overline{1,p}, \quad \alpha > \beta,$$

c_0 — нижняя граница спектра оператора A_α, $c_0 > 0$.

Невязка метода (3.1.6) имеет вид $r(s) = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \overset{s}{y}_\alpha - f$ и не согласована с естественной невязкой $A\overset{s}{y} - f$, характерной для итерационного метода (3.0.1). Возникает вопрос о согласовании этих невязок и получения эффективных оценок для контроля точности итерационного метода (3.1.6). В оценке (3.2.3) в $\overset{s}{Q}$ имеется слагаемое, содержащее $\|\overset{s}{v}\|_3^2$, что и используется для доказательства сходимости (3.1.6) к решению (3.1.1) и получения эффективной оценки контроля точности метода.

Справедлива

ТЕОРЕМА 3.2.1 *Пусть выполняются условия (3.1.4) и операторы A_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, взаимно коммутативны. Тогда итерационный метод (3.1.6) при $\sigma = p$ сходится к решению уравнения (3.1.1) и для его скорости сходимости справедлива оценка*

$$\|\overset{s}{\widetilde{y}} - y\| \leq \frac{p\tau + c^{-1}}{(1 + 2c_0 p\tau)^{s/2}} \Big(\|r(0)\| + p^{-1}\tau^{-1}\|\overset{\circ}{v}\|_3\Big). \tag{3.2.10}$$

Кроме того, в третьей главе показано, что в случае некоммутативности компонент оператора исходной задачи, для сходимости итерационных процессов возникают требования, связанные не только с нижней границей спектра операторов A, A_α, $\alpha = \overline{1,p}$, но и с верхней его границей. Причем эти требования не превышают, а скорее согласуются с требованиями для метода факторизации при коммутативности компонент оператора исходной задачи. Справедливы:

ТЕОРЕМА 3.2.2 *Пусть выполняются условия (3.1.4). Тогда при $\sigma = p$ итерационный метод (3.1.6) сходится к решению уравнения (3.1.1) и для его погрешности справедлива оценка*

$$\|\overset{s}{\rho}\|_A \le c^{-1/2}\|r(s)\| + \Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\Big\|\frac{1}{p}\sum_{\beta=1}^{p}\overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)}\Big\|^2_{A_\alpha}\Big)^{1/2} \le$$

$$\le (c^{-1/2} + \tau\Delta^{1/2})q^{-s/2}\Big(Q(\overset{\circ}{y})\Big)^{1/2}, \qquad (3.2.14)$$

где $A_\alpha < \Delta_0 E$, $\Delta = p\Delta_0$.

ТЕОРЕМА 3.2.3 *Пусть $A_\alpha \ge \delta_\alpha E$, $\alpha = \overline{1,p}$, $\delta_\alpha > 0$. Тогда итерационный метод (3.1.6) сходится к решению уравнения (3.1.1) и для его скорости сходимости справедлива оценка*

$$Q(\overset{s+1}{z}) \le q^{s+1}Q(\overset{0}{z}), \quad s = 0, 1, ...,$$

где

$$Q(\overset{s+1}{z}) = \|\overset{s+1}{\tilde{z}}\|^2 + \tau^2 p^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|A_\alpha \overset{s}{z}_\alpha\|^2,$$

$$q = \min\Big((1 + 2\tau\delta\Theta p)^{-1}, (1 + (1-\Theta)\Delta^{-1}p^{-2}\tau^{-1})^{-1}\Big),$$

$$\overset{s}{z}_\alpha = y - \overset{s}{y}_\alpha, \quad \overset{s}{\tilde{z}} = y - p^{-1}\sum_{\beta=1}^{p}\overset{s}{z}_\beta,$$

$$\alpha = \overline{1,p}, \quad \overset{0}{z}_\alpha = y - y_0, \quad \delta = \min_{1<\alpha<p}\delta_\alpha, \quad E\Delta_\alpha > A_\alpha,$$

$$\Delta = \max_{1<\alpha<p}\Delta_\alpha, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Из оценки следует, что оптимальная скорость сходимости в данном случае достигается при выполнении равенства $1 + 2\tau\Theta\delta p = 1 + (1 - \Theta)\Delta^{-1}p^{-2}\tau^{-1}$, т.е. при $\tau = (\Delta\delta)^{-0.5}p^{-3/2}(2)^{-0.5}(1-\Theta)/\Theta^{0.5}$. Этот результат согласуется с обычным методом переменных направлений и методом факторизации. Обратим внимание, что в данном случае нет ограничения на количество операторов расщепления и не требуется их коммутативность.

Построены и изучены аддитивные итерационные методы в сочетании с методом конечных элементов для решения стационарных уравнений конвекции-диффузии. Заметим, что метод расщепления в сочетании с методом конечных элементов был впервые предложен для двумерных параболических уравнений. Эта идея получила дальнейшее развитие при разработке методов решения более широкого класса нестационарных задач. При построении экономичных разностных схем на основе суммарной аппроксимации (покомпонентного расщепления), когда исходный оператор разбивается на четыре одномерных неотрицательных оператора, возникают ограничения на коэффициенты исходного уравнения более жесткие, чем условие эллиптичности. Кроме того, при использовании этого метода возникают, на наш взгляд, существенные трудности, связанные, во-первых, с условиями на выбор шагов сетки для обеспечения устойчивости алгоритма, и, во-вторых, с наличием дополнительных требований на конфигурацию конечного элемента. В данной работе предложен многокомпонентный вариант метода переменных направлений, который обладает абсолютной устойчивостью при разбиении оператора на произвольное число некоммутативных операторов и относится к методам расщепления полной аппроксимации. На основе данного метода построены экономичные итерационные алгоритмы решения конечно-элементных разностных схем (количество разбиений четыре и шесть), при этом неестественные ограничения, возникающие при использовании метода расщепления, сняты.

В заключении третьей главы приведены примеры вычислительного эксперимента, которые подтверждают результаты теоретических исследований, предложенных в диссертационной работе методов. Рассмотрена трехмерная задача Дирихле для уравнения Пуассона в единичном кубе

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G, \quad u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{3.5.4}$$

где $\Delta = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$, $\overline{G} = \{0 \le x_\alpha \le 1,\ \alpha = 1, \ldots, 3\}$ — единичный куб, Γ — граница области $\overline{G}$.

Для приближенного решения (3.5.4) использован итерационный метод (3.1.6) при $\sigma = 3$ и $\alpha = 1, 2, 3$. Расчеты проводились при заданной точности $\varepsilon = 10^{-4}$. Анализировалась зависимость скорости сходимости итераций от пространственных шагов сетки и итерационного параметра. Вычислительный эксперимент показал:

Минимальное число итераций достигается для значения $\tau = \tau_0 \sim$ 0,025, при этом $s_0(\varepsilon) \sim 13$.

С увеличением количества точек дискретизации N число итераций, необходимых для достижения заданной точности ε, не возрастает в соответствии с оценкой из теоремы 3.2.1.

Вывод из вычислительного эксперимента: скорость сходимости итерационного многокомпонентного метода переменных направлений (3.1.6) зависит только от нижней границы спектра оператора A и заданной точности и не зависит от шага пространственной сетки. Полностью подтвердились теоретические результаты для случая коммутативности компонент расщепления исходного оператора задачи.С учетом утверждения теоремы 3.2.1 непосредственно следует оценка числа итераций s, необходимых для уменьшения начальной ошибки в $1/\varepsilon$ раз, а именно:

$$s \geq s_0(\varepsilon) = \frac{2\ln\left(2c^{-1}/\varepsilon\right)}{\ln\left(1+2p^{-1}\right)}.$$

Сравнение с экономичными методами: скорость сходимости классического метода переменных направлений в двумерном варианте и метода факторизации для случая коммутативных операторов разбиения зависит от шага пространственной дискретизации даже при оптимальном выборе итерационных параметров.

Для случая некоммутативности операторов расщепления вычислительный эксперимент показал: скорость сходимости метода зависит от согласования итерационного параметра и шага пространственной сетки. Ситуация довольно точно предсказана оценкой с теоремы 3.2.2. В правую часть (3.2.14) входит слагаемое $\tau\Delta^{1/2}$, которое и требует для получения оптимальной скорости сходимости согласования итерационного параметра и шага пространственной сетки. Если сравнивать оценку в теореме 3.2.2 с классическим двухкомпонентным методом переменных направлений без чебышевских итерационных параметров, то количество итераций в этих методах практически совпадают. Основная потеря точности идет за счет дифференцирования в разности компонент решения, которое можно представить $\|\overset{s}{\rho}\|_A \leq \|r(s)\| + \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|A_\alpha\left(\frac{1}{p}\sum_{\beta=1}^{p}\overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)}\right)\right\|\right) \leq \varepsilon$. Как правило, в экономичных итерационных методах при произвольном расщеплении исходного оператора присутствует требование попарной коммутативности компонент оператора исходной задачи и сравнение с ними не представляется возможным. Кроме того, проанализировано влияние вычислительной погрешности на динамику сходимости векторно-аддитивных итерационных алгоритмов. Сделаны рекомендации о целесообразности нейтрализации вычислительной погрешности при значительных отличиях минимальных и максимальных собственных значений операторов разбиения, а также о выборе решения в данном случае. Согласно результатам численных экспериментов, вычислительная погрешность векторно-аддитивного итерационного метода (3.1.6) в двухкомпонентном случае не хуже, чем у классического метода Писмана — Рэкфорда.

Четвертая глава посвящена построению и исследованию методов декомпозиции решения многомерных задач математической физики. В данном случае мы имеем дело с расщеплением исходной задачи по подобластям. На основе многокомпонентных векторных схем расщепления полной аппроксимации разработаны достаточно эффективные методы разбиения области, в том числе со сложной границей, и переход к задачам в подобластях, форма которых достаточно простая. На основе неявных многокомпонентных разностных схем предложены методы декомпозиции области с возможностью относительно независимой реализации алгоритма в каждой из подобластей. Выбор конкретных алгоритмов в подобластях и структура расщепления задачи может зависеть от архитектуры используемых ЭВМ. Параметры схемы выбираются исходя из условий корректности разностной задачи в каждой из подобластей, включая условия в граничных узлах между подобластями. Для нестационарных многомерных параболических уравнений второго порядка построены методы, структурно близкие к явным, но в отличие от последних, обладающие безусловной устойчивостью. Изучены итерационные методы декомпозиционного типа для решения стационарных задач. В качестве примера рассмотрено решение двумерного уравнения конвекции-диффузии, когда в качестве подобластей выступают отдельные ячейки сетки.

Иллюстрацией применения результатов главы 4 является применение метода декомпозиции из второго параграфа к модельной задаче о двумерном стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости, описываемом уравнением

$$v_{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + v_{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \qquad (4.2.4)$$

$$u(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \qquad (4.2.5)$$

где $\partial\Omega$ — граница квадратной области $\Omega : 0 < x_1, x_2 < 1$.

Постоянная ν в уравнении (4.2.4) имеет смысл малого параметра и в зависимости от физической интерпретации задачи выражается соответствующими аспектными соотношениями, определяющими критерий подобия, например, числом Рейнольдса ($\nu = 1/\mathrm{Re}$) или числом Пекле (Pe) для задачи конвекции-диффузии. Задачу (4.2.4), (4.2.5) можно рассматривать как упрощенную модель Навье — Стокса в переменных вихрь — функция тока для заданного векторного поля скоростей, относительно которого требуется выполнение условия неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \tag{4.2.6}$$

К данной модельной задаче применены предложенные безусловно сходящиеся итерационные методы решения уравнения переноса вихря, основанные на методе декомпозиции области из данной диссертации, когда в качестве подобластей разбиения выступают ячейки сетки. При построении численного алгоритма использован симметричный вид уравнения диссипативного переноса несжимаемой жидкости и соответствующая разностная схема с центральными разностями для аппроксимации конвективных членов. На примере тестовой задачи конвекции-диффузии пояснены основные свойства, характеризующие вычислительные качества построенного явного итерационного метода. Проанализирована зависимость скорости сходимости итераций от пространственных шагов сетки, итерационного параметра τ и числа Pe. Для стандартных неявных итерационных методов простой итерации и минимальных поправок (разрешающий оператор $B \equiv \Lambda$) имеет место рост числа итераций, пропорциональный Pe^2, а в вариационных методах GCW — пропорциональный Pe. Для предложенного в работе алгоритма число итераций возрастает медленнее, чем при линейной зависимости, и его рост при больших Pe приближенно пропорционален $\mathrm{Pe}^{1/2}$. Зависимость числа итераций от величины h можно приближенно оценить как $\sim h^{-1}$. Характерно, что при фиксированном h минимум числа итераций для различных значений Pe достигается в области одних и тех же значений τ, а величина оптимального итерационного параметра τ по результатам вычислительного эксперимента пропорциональна h. Отметим, что эти решения хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами, и показывают устойчивую работу метода в областях больших Pe.

В пятой главе многокомпонентное векторное расщепление применено для алгоритмического разделения сложных задач, которые описывают различные процессы и явления. Здесь мы имеем, так называемый, экономичный алгоритм расщепления по физическим процессам. Предложены разностные схемы и итерационные методы для решения системы вязкой несжимаемой жидкости. В качестве базовых выбраны энергетически нейтральные разностные схемы, которые были ранее предложены для уравнений Навье — Стокса в работе И.В. Фрязинова. Выбор такого вида схем объясняется возможностью проводить вычисления без постановки дополнительных краевых условий для давления с точным условием примыкания на границе и разностным уравнением неразрывности. Энергетически нейтральные разностные схемы являются неявными алгоритмами с довольно сложной конструкцией, поэтому для их реализации требуется построение экономичных методов, которые сохраняли бы свойства консервативности и полной аппроксимации исходных схем. В частности, для линеаризованного уравнения Навье — Стокса предложены безытерационные методы для нестационарных задач и итерационные аддитивные методы для решения стационарных задач. Изучены вопросы устойчивости предложенных методов и сходимости итерационных процессов. Для системы нелинейных уравнений Навье — Стокса предложены и изучены аддитивные разностные схемы, которые, в отличие от работ В.Н. Абрашина, С. Лапко, не требуют итерационных методов для своей реализации. А именно: в пятой главе второго параграфа рассматривается нестационарная задача

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \nu\Delta u_k + \sum_{\alpha=1}^{2} u_\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial P}{\partial x_k} + f_k(x), \quad (x,t)\in\Omega^{(2)}\times(0,T], \tag{5.2.1}$$

$$\nu > 0, \quad k = 1,2,$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x,t)\in\Omega^{(2)}\times(0,T], \tag{5.2.2}$$

$$u_k|_{S_T} = 0, \quad S_T = \Gamma\times(0,T], \quad u_k(x,0) = \varphi_k(x), \quad x\in\overline{\Omega}^{\,(2)}. \tag{5.2.3}$$

Пусть H_h — вещественное пространство сеточных вектор-функций $\overline{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$ со скалярным произведением $((\overline{y},\overline{v})) = \sum\limits_{k=1}^{2}(y_k, v_k)$ и нормой $\|\overline{y}\| = ((\overline{y},\overline{y}))^{1/2}$, (y,v) — скалярное произведение на сетке ω_h. Аналогично задаются вектор-функции и скалярные произведения на сетке Ω_h. На сетке ω_h, Ω_h дифференциальную задачу (5.2.1) — (5.2.3) аппроксимируем следующей разностной схемой (обозначения взяты из статьи *Абрашин В. Н., Лапко С. Л.* Об одном классе разностных схем решения уравнений Навье — Стокса // Дифференц. уравнения.— 1992.— Т. 28, № 7.— С. 1154—1167):

$$\frac{\widehat{y}_k - y_k}{\tau} - \nu\Delta_h\widehat{y}_k + K_k(\widehat{y},\widehat{y}_k) = -q_{\widetilde{x}_k} + f_k, \tag{5.2.8}$$

$$x\in\omega_h, \quad k = 1,2,$$

$$y_{1\widetilde{x}_1} + y_{2\widetilde{x}_2} = 0, \quad x\in\Omega_h, \quad y_k = 0, \quad x\in\gamma_h, \tag{5.2.9}$$

где

$$\Delta_h y_k = y_{k\overline{x}_1x_1} + y_{k\overline{x}_2x_2}, \quad q_{\widetilde{x}_k} = 0,5h_k^{-1}\{q^{(0,5,0,5)} +$$

$$+q^{(0,5,-0,5)} - q^{(-0,5,0,5)} - q^{(-0,5,-0,5)}\}, \quad x \in \omega_h$$

(аналогично аппроксимируются в (5.2.9) $y_{k\widetilde{x}_k}$ на сетке Ω_h),

$$K_k(y, y_k) = K_{1k}(y_1, y_k) + K_{2k}(y_2, y_k),$$

$$K_{1k}(y_1, y_k) = \widetilde{y}_1^{(-0,5),}(0,5(y_k + y_k^{(-1),}))_{x_1},$$

$$\widetilde{y}_1^{(-0,5),} = (1/8)(y_1^{,(1)} + y_1^{(-1),(1)} + 2y_1 + y_1^{,(-1)} + 2y_1^{(-1),} + y_1^{(-1),(-1)}),$$

$$K_{2k}(y_2, y_k) = \widetilde{y}_2^{,(0,5)}(0,5(y_k + y_k^{,(-1)}))_{x_2},$$

$$\widetilde{y}_2^{,(0,5)} = (1/8)(y_2^{(-1),} + y_2^{(1),(-1)} + 2y_2 + 2y_2^{,(-1)} + y_2^{(-1),} + y_2^{(-1),(1)}),$$

$$y = y^{i_1,i_2}, \quad y^{(-1),(1)} = y^{i_1-1,i_2+1}, \quad y^{,(1)} = y^{i_1,i_2+1}, \quad y^{(1),} = y^{i_1+1,i_2}.$$

Для решения (5.2.8), (5.2.9) можно использовать неявный итерационный метод

$$(\overset{s+1}{y}_k - \overset{s}{y}_k)/\tau_s - \nu\Delta_h \overset{s+1}{y}_k + K_k(\overset{s}{y}, \overset{s+1}{y}_k) + \overset{s+1}{q}_{\widetilde{x}_k} = f_k, \tag{5.2.10}$$

$$k = 1, 2, \quad \overset{s+1}{q}_{\widetilde{x}_1} + \overset{s+1}{q}_{\widetilde{x}_2} = 0.$$

Аддитивный разностный алгоритм построенный на основе представления (5.2.8) будет иметь вид

$$\frac{\widehat{y}_k^{(i)} - \widetilde{y}_k}{\tau} + \sigma\left(\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)} - A_{ik}y_k^{(i)}\right) + \sum_{\alpha=1}^{3} A_{\alpha k}y_k^{(\alpha)} = f, \tag{5.2.11}$$

$$y_{1\widetilde{x}_1}^{(3)} + y_{2\widetilde{x}_2}^{(3)} = 0, \quad k = 1; 2, \quad i = 1; 2; 3,$$

где

$$A_{ik}y_k^{(i)} = -\nu y_{k\overline{x}_i x_i}^{(i)} + K_k(y_i^{(3)}, y_k), \quad A_{3k}y_k^{(3)} = q_{\widehat{x}_k}, \quad \widetilde{y}_k = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_k^{(i)}$$

Уравнение (5.2.11) с соответствующими начальными и граничными условиями решается начиная с $i = 3$, а затем решаются остальные уравнения. Такая процедура делает реализацию линейной.

ТЕОРЕМА 5.2.1 *При $\sigma = 3$ разностная схема (5.2.11) устойчива и для ее решения справедлива оценка*

$$\left(\sum_{k=1}^{2} \|\widehat{\widetilde{y}}_k\|^2 + \tau\sum_{k=1}^{2}\|\sum_{i=1}^{3}\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)}\|^2\right) \le \left(\sum_{k=1}^{2}\|\widetilde{y}_k(0)\|^2 + \right.$$

$$\left. +\tau\sum_{k=1}^{2}\|\sum_{i=1}^{3}A_{ik}y_k^{(i)}(0)\|^2 + TC\max_{0\le\le T}\|f\|^2\right),$$

где $C > 0$.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность научному консультанту академику профессору Александру Андреевичу Самарскому за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. *Жадаева Н. Г.* Многокомпонентный вариант метода переменных направлений для эволюционных задач. I // Дифференц. уравнения.— 1992.— Т. 28, № 7.— С. 1218—1230.
2. *Волков В. М., Жадаева Н. Г.* Экономичные методы решения гиперболических систем I-го порядка // Дифференц. уравнения.— 1994.— Т. 30, № 7.— С. 1187—1193.
3. *Жадаева Н. Г.* Об одном методе разбиения области в нестационарных задачах математической физики // Дифференц. уравнения.— 1995.— Т. 31, № 7.— С. 1217—1221.
4. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* Многокомпонентный метод переменных направлений решения стационарных задач математической физики. I // Дифференц. уравнения.— 1996.— Т. 32, № 9.— С. 1212—1221.
5. *Жадаева Н. Г.* Многокомпонентный вариант метода переменных направлений для эволюционных задач. II // Дифференц. уравнения.— 1997.— Т. 33, № 7.— С. 998—1000.
6. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* Многокомпонентный метод переменных направлений решения стационарных задач математической физики. II // Дифференц. уравнения.— 1997.— Т. 33, № 9.— С. 1211—1219.
7. *Жадаева Н. Г.* Многокомпонентный метода переменных направлений решения многомерных задач для эллиптических уравнений со смешанными производными // Дифференц. уравнения.— 1998.— Т. 34, № 7.— С. 948—957.
8. *Жадаева Н. Г., Самарская Е. А.* Метод декомпозиции области решения сеточных параболических задач // Дифференц. уравнения.— 1999.— Т. 35, № 2.— С. 225—231.
9. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* об одном методе композиции построения итерационных алгоритмов решения стационарных задач математической физики // Дифференц. уравнения.— 1999.— Т. 35, № 7.— С. 948—957.

10. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* Аддитивные итерационные методы решения стационарных задач для уравнений Навье — Стокса // Дифференц. уравнения.— 1999.— Т. 35, № 11.— С. 1543—1552.
11. *Абрашин В. Н., Волков В. М., Егоров А. А., Жадаева Н. Г.* Об одном классе разностных методов решения уравнений Навье — Стокса // Известия вузов. Матем.— 1999.— № 1.— С. 3—11.
12. *Самарский А. А., Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* Аддитивные итерационные методы решения задач математической физики // Доклады РАН.— 2000.— Т. 373, № 6.— С. 734—736.
13. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* О скорости сходимости экономичных итерационных методов для стационарных задач математической физики // Дифференц. уравнения.— 2000.— Т. 36, № 11.— С. 1220—1229.
14. *Абрашин В. Н., Егоров А. А., Жадаева Н. Г.* Экономичные итерационные схемы реализации метода конечных элементов для стационарных краевых задач математической физики // Известия вузов. Матем.— 2000.— № 11.— С. 3—11.
15. *Егоров А. А., Жадаева Н. Г.* Схемы расщепления полной аппроксимации в методах декомпозиции области // Матем. моделирование.— 2000.— Т. 12, № 2.— С. 35—45.
16. *Абрашин В. Н., Егоров А. А., Жадаева Н. Г.* О скорости сходимости аддитивных итерационных методов // Дифференц. уравнения.— 2001.— Т. 37, № 7.— С. 867—879.
17. *Абрашин В. Н., Егоров А. А., Жадаева Н. Г.* Об одном классе аддитивных итерационных методов // Дифференц. уравнения.— 2001.— Т. 37, № 12.— С. 1664—1673.
18. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* Экономичные аддитивные разностные схемы для многомерных нелинейных нестационарных задач // Дифференц. уравнения.— 2002.— Т. 38, № 7.— С. 907—917.
19. *Жадаева Н. Г.* Об одном экономичном методе для многомерных уравнений движения и переноса // Дифференц. уравнения.— 2002.— Т. 38, № 9.— С. 1257—1262.
20. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* Об аддитивных итерационных методах и оценках их скорости сходимости // Известия вузов. Матем.— 2003.— № 1.— С. 3—11.
21. *Абрашин В. Н., Волков В. М., Жадаева Н. Г.* Вычислительная погрешность векторно-аддитивных итерационных методов // Дифференц. уравнения.— 2005.— Т. 45, № 7.— С. 1187—1193.

22. *Абрашин В. Н.,Жадаева Н. Г.* Об аддитивных методах для уравнений Навье — Стокса // Известия вузов. Матем.— 2005.— № 1.— С. 3—9.
23. *Абрашина-Жадаева Н. Г., Романова Н. С.* Многокомпонентные схемы векторного расщепления для решения многомерных задач математической физики // Дифф. уравнения.— 2006.— Т.46.— № 7.— С. 883—894.
24. *Абрашин В. Н., Егоров А. А., Жадаева Н. Г.* Экономичные итерационные алгоритмы решения стационарных задач математической физики // Lietuvos matem. Rinkinys.— 2000.— Т.40, № 4.— С. 387—403.
25. *Abrashin V. N., Ciegis R., Pakeniene V., Zhadaeva N. G.* Stabilitu analysis of Seidel type multicomponent iterative method // Mathematical modelling and analysis.— 2002.— V. 7, № 1.— C. 1-10.
26. *Abrashina-Zhadaeva N. G., Romanova N. S.* A splitting type algorithm for numerical solution of PDEs of fractional order // Mathematical Modelling and analysis.— 2007.— V. 12, № 4.— P. 399—408.

Статьи в сборниках трудов конференций

27. *Abrashina-Zhadaeva N. G., Romanova N. S.* Numerical decomposition method for the two-dimensional fractional diffusion equation // Матер. междунар. конф. «Теория функций и вычислительные методы», Астана, 5–9 июня 2007 / ЕНУ им. Л.И. Гумилева, 2007.— С. 14—16.
28. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* Разностные схемы для задач математической физики в областях произвольной формы // Дифференц. уравнения и их применение.— Вильнюс, 1988.— Вып. 43.— С. 22—30.
29. *Abrashin V. N., Zhadaeva N. G.* Multicomponent method of variable directions for solution of multidimensional non-stationary problems of mathematical physics // Mathematical Modelling and Applied Mathematics: Proc. of Intern. IMACS Conf., Moscow, June 18–23, 1990.— P. 113—114.
30. *Абрашин В. Н., Дзюба И. В., Жадаева Н. Г.* О решении задач математической физики многокомпонентным методом переменных направлений // Дифференц. уравнения и их применение.— Вильнюс, 1991.— Вып. 46.— С. 18—24.
31. *Abrashin V. N., Zhadaeva N. G.* Multicomponent alternating direction method for solving problems of mathematical physics // Second Intern. Conf. “Finite-difference methods: Theory and application”, Minsk, 1998.— V. 1.— P. 12—20.
32. *Жадаева Н. Г.* О решении стационарных задач со смешанными про-

изводными многокомпонентным методом переменных направлений // Второй Всероссийский семинар «Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач». Материалы докл. (Казань, 18–21 сент. 1998 г.) / Казан. мат. об-во. УНИПРЕСС.— Казань, 1998.— С. 28—30.

33. *Абрашин В. Н., Егоров А. А., Жадаева Н. Г., Самарская Е. А.* Итерационный многокомпонентный метод переменных направлений решения стационарных задач математической физики. // Труды института математики НАН Беларуси.— 1999.— Т. 3.— С. 99—105.
34. *Абрашин В. Н., Егоров А. А., Жадаева Н. Г.* Additive iterative methods and convergence rate estimates // Труды института математики НАН Беларуси.— 2002.— Т. 11.— С. 13—21.
35. *Абрашин В. Н., Волков В. М., Жадаева Н. Г.* Аддитивный разностный метод для системы нестационарных уравнений Навье — Стокса в обобщенных криволинейных координатах. // 5-й Всероссийский семинар, посвященный 200-летию Казанского университета. «Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач». Материалы докл. (Казань, 18–21 сент. 2004 г.). / Казан. госуниверситет.— Казань, 2004.— С. 4—7.
36. *Жадаева Н. Г.* Многокомпонентные схемы расщепления для нелинейных многомерных задач математической физики. // 6-й Всероссийский семинар. «Сеточные методы и их приложения». Материалы докл. (Казань, 1–3 окт. 2005 г.) / Казан. госуниверситет.— Казань, 2005.— С. 11—14.

Тезисы докладов на конференциях

37. *Жадаева Н. Г.* Один вариант метода переменных направлений для уравнений параболического типа // Тез. докл. Междунар. матем. конф. «Теория приближения и задачи вычислительной математики».— Днепропетровск, 26–28 мая 1993.— С. 18—19.
38. *Жадаева Н. Г.* О распараллеливании вычислений при решении многомерных задач // Тез. докл. Междунар. матем. конф., «Проблемы математики и информатики», 1994 в II ч. / Гомельский гос. университет.— Гомель, 1994.— Ч. 2.— С. 48—49.
39. *Abrashin V. N., Zhadaeva N. G.* Multicomponent alternating direction method for solving problems of mathematical physics // Proc. of Second Intern. Conf. "Finite-difference methods: theory and application" (CFDM98) / NAN of Belarus, Institute of mathematics.— Minsk, 1998.— V. 1.— P. 12.
40. *Егоров А. А., Жадаева Н. Г.* Итерационные методы разделения пе-

ременных для стационарных задач математической физики // «Еругинские чтения VI»: Тез. докл. Межд. мат. конф., Гомель, 1999 г. / Гомельский гос. университет.— Гомель, 1999.— Ч. 2.— С. 18—19.
41. *Самарский А. А., Жадаева Н. Г.* Экономичные итерационные методы решения стационарных задач математической физики // Тез. докл. 8 Белорусской матем. конф.— Минск, 2000.— Ч. 3.— С. 36.
42. *Жадаева Н. Г.* Об одном методе решения уравнений Навье — Стокса // «Еругинские чтения IX»: Тез. докл. Междунар. матем. конф., Витебск, 2003 г. / Витебский гос. университет.— Витебск, 2003.— Ч. 2.— С. 18—19.
43. *Abrashin V. N., Zhadaeva N. G.* Additive methods for solution of nonlinear problems of mathematical physics // Mathematical Modelling Analysis Abstracts of the 8th Intern. Conf. MMA 2003, Trakai.— P. 3.
44. *Жадаева Н. Г., Романова Н. С.* О векторной аддитивной модели для параболических уравнений со смешанными производными // Современные методы теории краевых задач: Матер. Воронежской весенней матем. школы «Понтрягинские чтения XVI». В честь 100-летия академика С.М. Никольского, Воронеж, 3–9 мая 2005 г. / ВГУ, 2005.— С. 58.
45. *Абрашина-Жадаева Н.Г., Волков В.М.* Расщепление по подобластям в методах решения многомерных задач математической физики // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования. Междунар. научн. конф., Воронеж, 12–17 декабря 2005 г. / ВГУ, 2005.— С. 18.
46. *Volkov V. M., Zhadaeva N. G.* A computing error of parallel vector-additive iterative methods // Mathematical Modelling Analysis Abstracts of the 10th Intern. Conference, Trakai, June 1–5, 2005.— Pt. 3.— P. 150.
47. *Абрашина-Жадаева Н. Г., Романова Н. С.* К вопросу моделирования смешанной задачи для многомерных уравнений системой однотипных задач // AMADE-2006: Тез. докл. Междунар. матем. конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений», Минск, 13–19 сентября 2006 г.— Минск, 2006.— С. 11.
48. *Abrashina-Zhadaeva N. G., Romanova N. S.* On convergence of additive iterative methods for stationary problems of mathematical physics // Тез. докл. междунар. конф. «Тихонов и современная матем.», Москва, 19–25 июня, 2006 г. / МГУ, 2006.— С. 10—11.

49. *Abrashina-Zhadaeva N. G., Romanova N. S.* Decomposition methods for multi-dimensional fractional partial differential equations // Abstracts of 12-Intern. conf. “Mathematical modeling and analysis”.— 2007.— P. 3.
50. *Абрашина-Жадаева Н. Г., Романова Н. С.* Гибридный метод для 2D уравнений диффузии дробного порядка // Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования: Сб. науч. тр.— Гродно, ГрГУ, 2007.— С. 164—167.